

# Asymetrie a dynamika závislostí na finančních trzích

Tomáš Jeřábek

## Abstrakt

Pochopení závislosti mezi akciovými a měnovými výnosy je zvláště důležité na mezinárodních finančních trzích. I když výzkumů zaměřených na specifikaci závislostí mezi různými akciovými výnosy nebo mezi odlišnými měnovými kurzy je relativně dost, tak problematika ohledně závislostí měnovými a akciovými výnosy nebyla doposud výraznějším středobodem výzkumných zájmů. Právě tato skutečnost je hlavním motivem ke studiu struktury závislosti na mezinárodních finančních trzích. V tomto příspěvku jsou prezentovány důkazy o časově proměnlivé neboli dynamické a dále asymetrické závislosti mezi sledovanými výnosy. Za účelem zohlednění této struktury závislostí je navržena asymetrická dynamická Studentova kopule. Empiricky je demonstrováno, že používání této kopule činí řízení rizik robustnější, a to ve smyslu optimální alokace aktiv na mezinárodních finančních trzích.

## Klíčová slova

Alokace aktiv, struktura závislostí, Value at Risk, Expected Shortfall

## Klasifikace JEL

L33, H59, Q15

## Úvod

Neustále rostoucí globalizace ve finančním sektoru nutí finanční instituce k provádění operací na mezinárodních finančních trzích. Z tohoto hlediska se jako významná jeví především problematika spojená s optimální alokací aktiv právě na těchto trzích, jejíž důležitost byla odhalena nedávnou globální finanční krizí a evropskou dluhovou krizí. Neúspěch tradičních metod pro měření rizik a optimalizaci portfolia motivuje k dalšímu výzkumu složitých a dynamických vztahů typických pro tyto trhy. Například Czado et al. (2012) v souvislosti se zmiňovanou krizí upozorňují na asymetrii v rozdělení výnosů na různých typech finančních trhů. Tedy prvořadým cílem současného výzkumu by mělo být hledání nových a vhodnějších modelů, jež dokáží tyto vztahy lépe zachytit.

Finanční a ekonometrická literatura poskytuje řadu důkazů o podmíněné struktuře závislostí neboli o tom, že závislosti mezi aktivy se mění v čase, viz například Jondeau a Rockinger (2006) nebo Dias and Embrechts (2010). Navíc výnosy různých typů finančních aktiv vykazují vyšší závislosti v krizových obdobích než v růstových fázích hospodářského cyklu, viz například Cerrato et al. (2015). Tento fenomén je obvykle nazýván asymetrickou závislostí, viz například Longin a Solnik (2001), Ang a Chen (2002), Poon et al. (2004), Patton (2006) a Christoffersen a Langlois (2013).

Uvědomění si přítomnosti těchto jevů je podle Okimota (2008) velmi důležité, protože může způsobit vážné problémy v případě zajištění a diverzifikace portfolia. Asymetrie závislostí na jednotlivých finančních trzích byla v posledních letech poměrně dobře specifikována. Například Patton (2006) nebo Czado et al. (2012) uvádějí, že na devizových trzích je tato asymetrie způsobená asymetrickou reakcí centrálních bank na pohyby měnových kurzů. V případě akciových trhů nepanuje jednoznačná shoda ohledně ekonomických příčin asymetrické závislosti, viz například Cerrato et al. (2015). Navzdory tomu většina autorů vidí jako jeden z hlavních důvodů chování rizikově averzních investorů, jejichž hodnotová funkce není dle prospektové teorie symetrická, tj. investoři ztráty snášejí hůře než zisky, a to i v případě, že jsou stejného rozsahu, viz například Holt a Laury (2002).

Cílem tohoto příspěvku je nejprve zkoumat strukturu závislostí na vybraných finančních trzích, a to ve smyslu asymetrické a v čase proměnlivé závislosti. V této souvislosti je dále hledána vhodná metodika pro odhad rizikových měr Value at Risk (VaR) a Expected Shortfall (ES) při aplikaci na jak rozvíjející, tak rozvinuté mezinárodní finanční trhy.

Zbytek textu je členěn do pěti kapitol. V první části je prezentována motivace a z ní vycházející cíle výzkumu představeného v tomto příspěvku. Druhá část věnována popisu použitých dat, a to především ve smyslu popisu jejich struktury závislostí. Třetí a čtvrtá část uvádí zjištěné výsledky, konkrétně v třetí části je prezentována kvalita modelů pro odhad VaR s aplikací navržené asymetrické (AD) Studentovi kopule. Za účelem srovnání jsou pro odhad VaR použity rovněž další přístupy. Čtvrtá kapitola se zaměřuje na představení kvality aplikace AD kopule při realizaci procesu optimální alokace aktiv na mezinárodních finančních trzích. Vzhledem k rozsahu nejsou v příspěvku prezentovány popisy většiny použitých modelů včetně dalších technických detailů.

## 1 Motivace a cíle výzkumu

Modelování vícerozměrného rozdělení má v oblasti financí zásadní význam. Informace obsažené v těchto rozděleních mají mimořádně užitečný význam pro aktivní řízení rizik, jako je odhad míry rizika plynoucí z jednotlivých pozic, hodnocení vlivu hedgingu a vytvoření optimálního portfolia. V rámci vícerozměrných rozdělení hraje významnou roli závislost mezi jednotlivými marginálními rozděleními, viz například Cerrato et al. (2015). Jak uvádějí Poon et al. (2003), tradiční Pearsonova korelace představovaná lineární korelací, je v tomto ohledu značně nedostatečná, a to z důvodu nenormality uvedených rozdělení a přítomnosti nelineárních vztahů mezi jednotlivými marginálními rozděleními. Další možností pro měření závislostí je využití tzv. pořadových korelačních koeficientů (Kendallův nebo Spearmanův), které jsou založeny na míře pořadí bodů v rozdělení, a tedy oproti lineární korelaci jsou schopny zachytit polohu závislosti. Ovšem nevýhodou pořadových korelací je jednak jejich obtížnější interpretovatelnost a dále ignorace kauzálních vztahů mezi sledovanými rozděleními.

Daleko účinnějším nástrojem jsou tzv. kopule, jež umožňují vícerozměrné rozdělení vyjádřit ve tvaru jednotlivých marginálních rozdělení. Následnou aplikací pořadových korelačních koeficientů lze určit intenzitu závislosti. Díky použití pořadových korelací lze tímto způsobem měřit závislosti v různých částech rozdělení.

Studujeme povahu závislosti mezinárodních finančních trhů, přičemž se zaměřujeme na akciová portfolia a měnové kurzy. Středobodem zájmu je otázka, jak struktura závislosti mezi akciovým portfoliem a měnovým kurzem ovlivňuje řízení rizik a optimální alokaci aktiv na mezinárodních finančních trzích. Za tímto účelem je vytvořeno portfolio sestávající z různých akciových indexů denominovaných v domácí měně investora.

### 1.1 Měření rizika

Uvažujme  $i = 1, \dots, n$  akciových trhů, přičemž pracujeme s následujícími podmínkami:

- (i) na každém z těchto trhů se obchoduje v jiné měně,
- (ii) na žádném z uvedených trhů se neobchoduje v EUR

Předpokládejme, že v čase  $t$  investujeme 1 EUR na  $i$ -tém akciovém trhu při měnovém kurzu  $S_{i,t}$ , kde  $S_{i,t}$  představuje množství  $i$ -té měny získané za 1 EUR v čase  $t$ . V případě, že cena akcie na tomto trhu je  $P_{i,t}$  (v  $i$ -té měně a v čase  $t$ ), pak celkově můžeme za 1 EUR získat  $\frac{S_{i,t}}{P_{i,t}}$  akcií. Pro hodnotu realizované investice v čase  $t + 1$  v  $i$ -té měně,  $V_{i,t+1}$ , platí

$$V_{i,t+1} = \left( \frac{S_{i,t}}{P_{i,t}} \right) P_{i,t+1}, \quad (1)$$

kde  $P_{i,t+1}$  představuje cenu akcie v čase  $t + 1$  na  $i$ -tém akciovém trhu. Hodnotu investice v domácí měně (EUR) v čase  $t + 1$ ,  $V_{t+1}^{EUR}$ , lze pak vyjádřit jako

$$V_{t+1}^{EUR} = \left( \frac{S_{i,t}}{P_{i,t}} \right) \frac{P_{i,t+1}}{S_{i,t+1}}. \quad (2)$$

Nyní lze (2) přepsat do následujícího tvaru

$$V_{t+1}^{EUR} = \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{S_{i,t}} \right)} \right] \left[ 1 + \left( \frac{P_{i,t+1} - P_{i,t}}{P_{i,t}} \right) \right] \quad (3)$$

a s využitím definice aritmetického finančního výnosu lze (3) dále upravit do podoby

$$V_{t+1}^{EUR} = \frac{1 + r_{i,t+1}^P}{1 + r_{i,t+1}^S}, \quad (4)$$

kde  $r_{i,t+1}^P = \frac{P_{i,t+1} - P_{i,t}}{P_{i,t}}$  představuje jednodenní výnos  $i$ -tého akciového indexu a  $r_{i,t+1}^S = \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{S_{i,t}}$  je jednodenní výnos plynoucí z  $i$ -tého měnového kurzu.

Všimněme si, že  $V_{t+1}^{EUR}$  lze rovněž chápat jako změnu hodnoty investice v čase  $t + 1$  oproti času  $t$ . Vzhledem k této skutečnosti lze (3) upravit do podoby vztahující se k výnosu zmiňované investice, konkrétně  $V_{t+1}^{EUR} = 1 + r_{t+1}^{EUR}$ . Nyní logaritmizací (4) a následným zohledněním skutečnosti, že pro malé  $x \in R$  platí  $\ln(1 + x) \approx x$ , pro výnos  $i$ -té investice získáváme

$$r_{t+1}^{EUR} = r_{i,t+1}^P - r_{i,t+1}^S. \quad (5)$$

Tato investice může být interpretována jako portfolio s dlouhou pozicí pro evropský akciový trh a krátkou pozicí pro měnový kurz  $S$ . Struktura závislosti mezi akciovými a měnovými výnosy je proto zvláště důležitá v řízení rizik. Mezinárodní investoři chtějí zvládnout rizika extrémních událostí, aby se zabránilo rozsáhlejším finančním problémům.

Value at Risk (VaR) nebo Expected Shortfall (ES) jsou v současné době nejužitečnějšími opatřeními pro riziko extrémních událostí. Připomeňme, že jednodenní  $VaR_{t+1}(\alpha)$  daného portfolia představuje největší možnou ztrátu, kterou může portfolio utrpět následující obchodní den na dané úrovni spolehlivosti  $\alpha$ , viz Jorion (2007). Jinými slovy lze říci, pravděpodobnost, že portfolio v následujícím obchodním dnu utrpí ztrátu odpovídající hodnotě  $VaR_{t+1}(\alpha)$  je  $1 - \alpha$ , tj.

$$P(r_{t+1}^{EUR} < VaR_{t+1}(\alpha)) = 1 - \alpha \quad (6)$$

ES je modifikací VaR reprezentující průměrnou ztrátu převyšující VaR, viz Jorion (2007). Tedy

$$ES_{t+1}(\alpha) = E(r_{t+1}^{EUR} | r_{t+1}^{EUR} < VaR_{t+1}(\alpha)) \quad (7)$$

Vzhledem k tomu, že obě míry se zaměřují primárně na chvosty rozdělení výsledného portfolia, je pro řízení extrémních rizikových událostí rozhodující zohlednění skutečné struktury závislostí mezi chvosty rozdělení výnosů jednotlivých aktiv obsažených v portfoliu.

## 1.2 Optimalizace portfolia

Předpokládejme investici v hodnotě  $W$  EUR na současně všech  $i = 1, \dots, n$  akciových trzích, jinými slovy platí, že součet investovaných prostředků v jednotlivých zemích je roven jedné.

Na základě (3) lze určit, že pro hodnotu našeho portfolia v čase  $t + 1$  platí

$$V_{t+1}^{EUR} = w_1 \frac{1+r_{1,t+1}^P}{1+r_{1,t+1}^S} + \dots + w_n \frac{1+r_{n,t+1}^P}{1+r_{n,t+1}^S}, \quad (6)$$

kde pro váhy  $w_i$  platí  $w_1 + \dots + w_n = W$ . Nyní, vzhledem k tomu, že jednoduchou úpravou v (3) nahradíme čitatele již používaným tvarem (7.32), tj.

$$\frac{1+r_{i,t+1}^P}{1+r_{i,t+1}^S} = 1 + \frac{r_{i,t+1}^P - r_{i,t+1}^S}{1+r_{i,t+1}^S}, \quad (7)$$

můžeme (6) psát ve tvaru

$$V_{t+1}^{EUR} = W + r_{t+1}^{EUR}, \quad (8)$$

kde

$$r_{t+1}^{EUR} = w_1 r_{1,t+1}^{EUR} + \dots + w_n r_{n,t+1}^{EUR}, \text{ pro } r_{i,t+1}^{EUR} = \frac{r_{i,t+1}^P - r_{i,t+1}^S}{1+r_{i,t+1}^S} \quad (9)$$

Cílem je zkoumat význam modelování v čase proměnné závislosti a asymetrie v rámci optimální alokace aktiv, vycházejících z mezinárodních finančních trhů. Za účelem volby vah  $w_1, \dots, w_n$  jsou použity tři přístupy, konkrétně naivní diverzifikační strategie (BH – buy and hold strategie), strategie založená na aplikaci Markowitzova přístupu (MV) a strategie vycházející z optimalizace ES. V rámci všech optimalizačních přístupů uvažujeme následující předpoklady:

- Počáteční kapitál (v čase  $t$ ) investora činí 1 EUR

- Portfolio má životnost 1 den, tj. do času  $t + 1$ .
- Nepředpokládáme investici do bezrizikového aktiva, tj.  $r_f = 0$ .

První strategie spočívá v triviálním přístupu, kdy pro každé aktivum uvažujeme stejnou váhu, tj. v našem případě pokládáme

$$w_1 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$$

Druhá strategie vychází z Markowitzova přístupu k optimalizaci portfolia, jež je představen například v Alexander (2008). Konkrétně pracujeme s úlohou založenou na minimalizaci očekávaného rozptylu. Připomeňme, že řešíme optimalizační úlohu

$$\min w' \Sigma w, \quad (10)$$

vzhledem k podmínce

$$\begin{aligned} E(r_{t+1}^{EUR}) &\geq \tilde{r} \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_1 \geq 0, \dots, w_n &\geq 0 \end{aligned}, \quad (11)$$

kde  $\Sigma$  představuje kovarianční matici výnosů sledovaného portfolia.

Třetí strategie je založená na řešení optimalizační úlohy ve tvaru

$$\min ES_{\alpha}(r_{t+1}^{EUR}), \quad (12)$$

vzhledem k podmínce

$$\begin{aligned} E(r_{t+1}^{EUR}) &\geq \tilde{r} \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_1 \geq 0, \dots, w_n &\geq 0 \end{aligned}. \quad (13)$$

Následně podle Rockafellar a Uryasev (2000) transformujeme úlohu (12), (13) do tvaru optimalizačního problému minimalizace konvexní funkce  $H_{\alpha}(w, \beta)$ .

Za účelem hodnocení výkonnosti představených strategií používáme Sharpeův poměr (SR), pro jehož tvar v tomto případě platí (Sharpe, 1965):

$$SR(r_{t+1}^{EUR}) = \frac{E(r_{t+1}^{EUR})}{\sqrt{w' \Sigma w}}. \quad (14)$$

Vzhledem k omezení pramenících z použití Sharpeova poměru, a to především z jeho neschopnosti rozlišit mezi dobrou a špatnou volatilitou, aplikujeme rovněž poměr STAR, pro jehož tvar platí (Stoyanov et al., 2007)

$$STAR(r_{t+1}^{EUR}) = \frac{E(r_{t+1}^{EUR})}{ES_{\alpha}(r_{t+1}^{EUR})}. \quad (15)$$

Stěžejní částí třetí strategie je nalezení vhodných přístupů pro odhad VaR a následně ES. V tomto příspěvku jsou za tímto účelem uvažovány jak přístupy založené na dvourozměrných kopulích, tak přístupy vycházející z aplikace lineární korelace mezi výnosy akciového indexu a příslušného měnového kurzu. V případě kopul volíme takové kopule, které jsou schopny zachytit sledované znaky, tj. asymetrii a dynamiku závislostí. Konkrétně používáme symetrickou Studentovu kopuli, sešikmenou Studentovu kopuli a podmíněnou Studentovu kopuli.

Za účelem zachycení obou sledovaných znaků zároveň je navržen koncept asymetrické dynamické (AD) Studentovi kopule, jako kombinace sešikmené a podmíněné Studentovi kopule. Odhady VaR a ES, prováděné prostřednictvím kopul, jsou realizovány na základě aplikace Monte Carlo simulace.

Přístupy vycházející z aplikace lineární korelace zahrnují tradiční metody odhadu VaR a ES, konkrétně se jedná o základní parametrický přístup s předpokladem normality rozdělení výnosů obou aktiv (VC), modifikaci základního parametrického přístupu představená v RiskMetrics, tj. použitím modelu EWMA pro modelování volatility výnosů (RM), neparametrickou historickou simulaci s historickým vzorkem obsahujícím, jak 250 (HS250), tak 500 posledních pozorování (HS500).

Cílem je výzkumu je nejprve určit, zda se ve struktuře závislostí mezi sledovanými trhy vyskytuje asymetrie a dynamika. Tento cíl je realizován na základě kvality odhadů VaR při zapojení výše uvedených kopul. Dalším cílem je pak s použitím nejlépe hodnocené kopule realizovat optimální alokaci aktiv níže představeného portfolia prostřednictvím minimalizace ES. Za účelem porovnání výkonu jsou dále aplikovány první dvě výše uvedené strategie.

## 2 Data a analýza závislostí

V rámci datového souboru uvažujeme denní časové řady měnových kurzů vybraných měn vztažených k euru. Dále pak uvažujeme denní časové řady korespondujících akciových indexů. Všechny časové řady pokrývají období od 2. 1. 2003 do 31. 8. 2016. Celkem pracujeme se vzorkem 6 států, do kterého spadá USA, Švýcarsko, Japonsko, a dále pak Brazílie, Indie, Mexiko.

Konkrétně je uvažovaná množina šesti akciových indexů, a to americký S&P 500, švýcarský SMI (Swiss Market Index), japonský Nikkey 225, indický NIFTY 50, mexický

Mexbol a brazilský BOVESPA. Dále k nim příslušné měnové kurzy vzhledem k EUR, tj. USD/EUR, CHF/EUR, JPY/EUR, INR/EUR, MXN/EUR a BRL/EUR. Zdrojem dat jsou portál yahoo.com pro akciové indexy a databáze FRED pro měnové kurzy. Veškeré výpočty jsou realizovány prostřednictvím matematického software Matlab verze R2014b. Stejně tak veškeré grafy jsou výstupem z tohoto výpočetního prostředí.

Pro analýzu závislostí mezi akciovým indexem a korespondujícím měnovým kurzem byla použita jednak Pearsonova korelace, jež je schopna odhalit lineární závislosti a dále Spearmanova pořadová korelace indikující rovněž nelineární závislosti. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

**Tabulka č. 1: Korelační analýza dvojic výnosů akciový index-měnový kurz**

Korelace	USA	Japonsko	Švýcarsko	Indie	Mexiko	Brazílie
Pearson	-0,102	0,277	-0,176	0,245	0,207	-0,169
Spearman	-0,087	0,227	-0,127	0,208	0,174	-0,102

Zdroj: Vlastní zpracování dle vlastní kalkulace

Z tabulky je patrné, že v případě USA, Švýcarska a Brazílie potvrdily oba přístupy negativní korelaci. Právě negativní korelace mezi výnosy akciového indexu a směnného kurzu je očekávaným výsledkem, jenž plyne ze vzájemného vztahu obou veličin. Konkrétně, růst výnosů akciového indexu vyvolá zájem investorů, jež směňují své finanční prostředky do měny akciového indexu za realizace investice do daného indexu. Větší měřítko uvedených operací způsobí apreciaci měnového kurzu vztaheného k požadovanému indexu. Jinými slovy tedy růst akciového trhu v určité zemi je doprovázen poklesem příslušného měnového kurzu.

U zbývajících států docházíme k pozitivní korelaci, jež zřejmě vychází ze skutečnosti použití těchto měn v rámci carry trade obchodování<sup>1</sup>. Právě JPY je známým příkladem tohoto typu obchodování – hojně využívaný až do roku 2008. V případě Indie je INR v posledních letech druhou nejstabilnější měnou na rozvíjejících se trzích (po indonéské rupii), viz Bloomberg (2016), což investoři využívají právě v rámci carry trade obchodování. V případě Mexické měny je carry trade obchodování realizováno prostřednictvím vstupu do dlouhé pozice v domácí měně na swapovém trhu, viz BIS (2015).

Tabulka 2 pak představuje výsledky tzv. chvostové závislosti mezi rozděleními výnosů akciového indexu a příslušného měnového kurzu. Zde vycházíme z přístupu navrženého Pattonem (2013), jež definuje  $\lambda_D$ , resp.  $\lambda_H$  jako míru závislosti mezi dolními, resp. horními

<sup>1</sup> Jedná se o investiční strategii, jejímž cílem je prodat měnu s nízkou úrokovou sazbou a investovat do měny s vyšším úrokem, viz například Burnside (2012).



chvosty rozdělení výnosů. Při použití pro představená data ovšem vzniká problém, že uvedené míry nebudou schopny indikovat skutečnou přítomnost asymetrické závislosti. Namísto toho by bylo vhodnější měřit závislosti na vzájemně opačných částech chvostů jednotlivých rozdělení. Zde vycházíme ze situace, že akciové indexy a měnové kurzy, mezi nimiž závislost měříme, mají tendenci ke vzájemně opačnému vývoji, tj. pokles hodnoty akciového indexu bývá doprovázen depreciací souvisejícího měnového kurzu. A pro růst akciového indexu je opět charakteristická apreciacie příslušného kurzu. V tomto ohledu případná asymetrie závislostí může říci, zda převažuje závislost mezi dolním chvostem rozdělení vztaženém k akciovému indexu a horním chvostem rozdělení souvisejícího s měnovým kurzem, anebo naopak je větší síla závislosti mezi horním chvostem akciového indexu a dolním chvostem měnového kurzu. Za tímto účelem uvažujeme  $\lambda_{DH}$ , resp.  $\lambda_{HD}$  jako míru závislosti mezi dolním chvostem prvního rozdělení a horním chvostem druhého rozdělení, resp. naopak.

Druhý a třetí řádek tabulky 2 uvádí hodnoty  $\lambda_{DH}$  a  $\lambda_{HD}$ , třetí řádek pak představuje jejich rozdíly, přičemž s rostoucí hodnotou rozdílu roste přítomná asymetrie ve sledovaných závislostech. Výsledky ukazují, že ve všech případech dochází k větší či menší formě asymetrie závislostí. Konkrétně u většiny párů akciový index-měna se projevuje silnější závislost na levém chvostu,  $\lambda_{DH} > \lambda_{HD}$ , tj. současný pokles akciového indexu a depreciace měnového kurzu. Tento výsledek je v souladu například s Patton (2013). Výjimkou je Švýcarsko a Brazílie, kde je vidět naopak silnější závislost na pravém chvostu, tedy silnější závislost při růstu akciového indexu a současné apreciaci švýcarského Franku, resp. brazilského Realu než závislost při poklesu indexů a současné depreciaci příslušné měny. Tento výsledek lze dát do souvislosti s měnovými intervencemi, které v rámci sledovaného vzorku dat probíhaly v obou státech.

**Tabulka č. 2: Závislost mezi chvosty rozdělení akciového indexu a měnového kurzu**

	USA	JAP	SWIS	IND	MEX	BRAZ
$\lambda_{DH}$	0,029	0,038	0,032	0,097	0,064	0,062
$\lambda_{HD}$	0,016	0,031	0,044	0,089	0,059	0,073
$\lambda_{DH} - \lambda_{HD}$	0,013	0,007	-0,012	0,008	0,005	-0,011

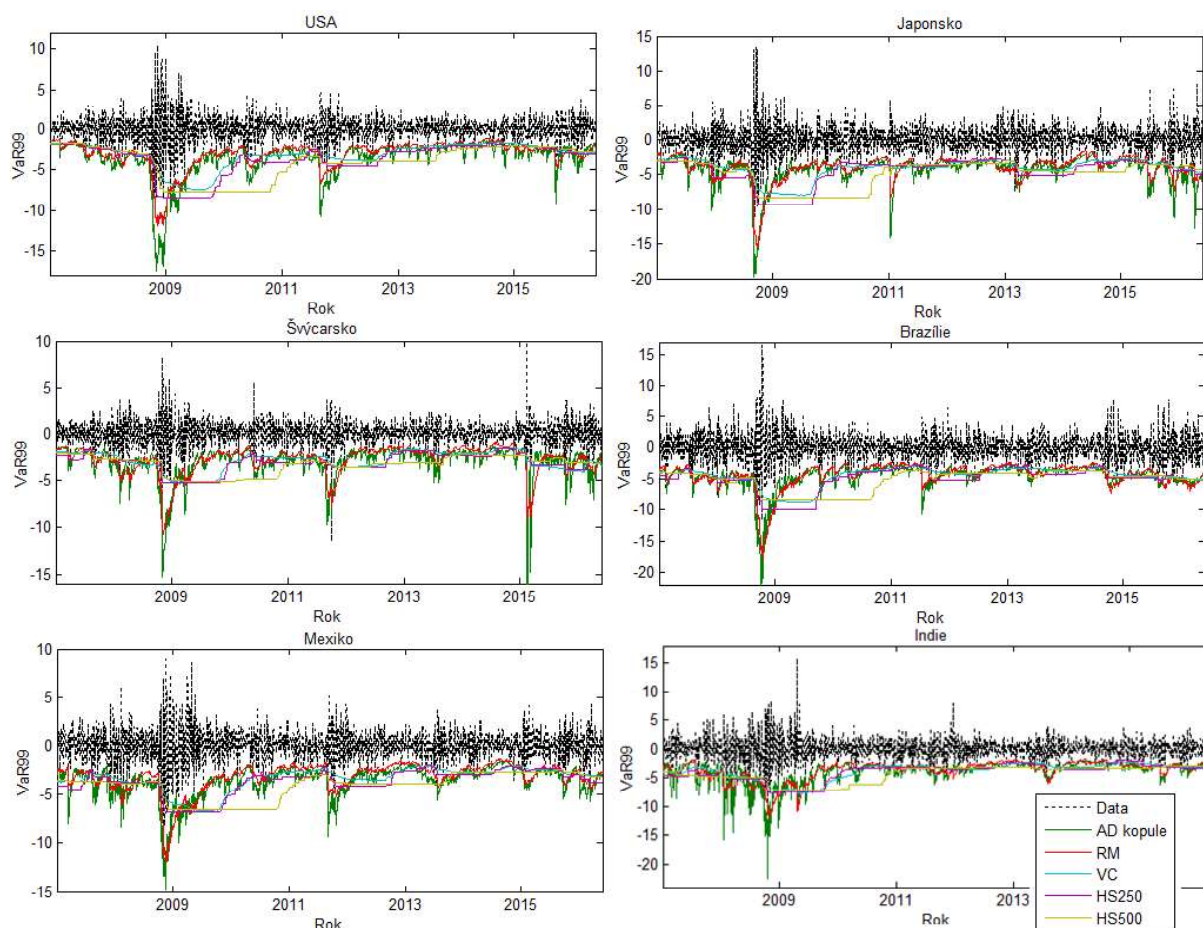
Zdroj: Vlastní zpracování dle vlastní kalkulace

### 3 Výsledky – odhady VaR

Odhady VaR a ES jsou koncipovány jako jednodenní se spolehlivostí 95 % a 99 %. Odhady jsou vytvářeny pro období od 2. 1. 2007 do 31. 8. 2016, tj. celkem 2400 hodnot. Jako trénovací

vzorek volíme posledních 250 hodnot, což odpovídá počtu obchodních dnů v kalendářním roce (pro první realizovaný odhad používáme data za období roku 2006) a tento vzorek rolujeme přes celé sledované období. V případě historické simulace pracujeme rovněž se vzorkem 500 posledních hodnot.

**Obrázek č. 1: Jednodenní odhady 99% VaR pro dvojici výnosů akciového indexu a měnového kurzu**



Zdroj: Vlastní zpracování dle vlastní kalkulace

Výsledky jsou následně podrobeny zpětnému testování s cílem ověřit robustnost použitých modelů. Konkrétně jsou použity Kupiecův nepodmíněný test (UC) a dále Christofferensův kombinovaný podmíněný test (CC). UC test zjišťuje, zda počet selhání modelu odpovídá hladině významnosti VaR. Vyšší počet selhání je testem identifikováno jako podhodnocování rizika, naopak nižší počet selhání test považuje za zbytečné nadhodnocování ztráty. Nevýhodou uvedeného testu je jeho neschopnost určit, zda jsou selhání náhodná, tedy nekorelovaná v čase. Tento problém řeší CC test, viz Alexander (2008). Celkově lze CC test považovat za hlavní indikátor kvality testovaného modelu.

Zaměříme se nejprve na neformální způsob zpětného testování v podobě uvažování podílu  $\hat{\alpha}/\alpha$  mezi empirickou a teoretickou pravděpodobností neúspěchu metody, a to ve smyslu podhodnocení skutečné ztráty. V případě teoretické pravděpodobnosti pracujeme s hodnotami odpovídajícími hladinám významnosti jednotlivých odhadů, tj.  $\alpha = 0,05$  a  $0,01$ . Empirická pravděpodobnost je určena jako relativní podíl mezi počtem chybných odhadů vedoucích k podhodnocení skutečné ztráty a počtem všech odhadů. Tabulka 3 představuje pozorované poměry pro  $\alpha = 0,01$ .

Tučně vyznačené hodnoty představují odhady, jež dle UC testu poskytují statisticky významně chybné odhady. Tučné orámování pak značí nejpřesnější odhad. Výsledky ukazují, že nejpřesnější odhady jsou poskytnuty aplikací asymetrické dynamické Studentovy kopule. Ovšem aplikace ostatních kopul přináší rovněž uspokojivé výsledky. Grafy na obrázku 1 prezentují výkon uvedených přístupů. Na každém z obrázků jsou představeny grafy vztahující k 99% VaR konkrétního trhu. Z obrázků je patrná výrazná flexibilita nejlépe hodnocené metody.

**Tabulka č. 3: Poměry skutečných a předpokládaných chybných jednodenních odhadů 99% VaR**

Metoda	USA	JAP	SWIS	IND	MEX	BRAZ
AD	1,1915	1,1064	1,1489	1,0638	0,9362	1,1064
A	1,2796	1,2369	1,2897	1,1371	1,1298	1,1132
D	1,3977	1,1726	1,1797	1,2914	1,1644	1,1244
S	1,4896	1,3079	1,1554	1,3641	1,2136	1,1992
RM	<b>2,3830</b>	<b>2,1702</b>	<b>2,0426</b>	<b>1,7021</b>	<b>2,1702</b>	1,4894
VC	<b>3,1064</b>	<b>2,3830</b>	<b>2,5106</b>	<b>2,1277</b>	<b>2,8085</b>	<b>2,0426</b>
HS250	<b>2,0000</b>	<b>1,8298</b>	<b>1,9149</b>	<b>1,6596</b>	<b>1,8723</b>	<b>1,9149</b>
HS500	<b>2,4255</b>	<b>1,8298</b>	<b>1,6596</b>	1,4894	1,4468	1,2340

Zdroj: Vlastní zpracování dle vlastní kalkulace

Za účelem komplexnějšího porovnání tabulka 4 pro každý z testovaných modelů prezentuje průměrné hodnoty a směrodatné odchylky sledovaných poměrů (jak pro  $\alpha = 0,01$ , tak pro  $\alpha = 0,05$ ). Směrodatná odchylka v tomto případě určuje míru odchýlení daného poměru od hodnoty 1. Pro směrodatnou odchylku  $SD_i$ , náležící  $i$ -tému modelu, platí

$$SD_i = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N [(\hat{\alpha}/\alpha)_j - 1]^2}, \quad (16)$$

kde  $N$  vyjadřuje počet hodnocených řad (v rámci určité míry spolehlivosti). V našem případě je  $N = 6$ . Modely s nejmenší směrodatnou odchylkou mají tendenci ke konzistentnosti napříč sledovanými řadami výnosů. Z tabulky je patrné, že napříč sledovanými daty jsou metody založené na kopulách výkonnější než ostatní čtyři testované přístupy. Konkrétně nejlepšího výkonu je dosaženo použitím asymetrické dynamické kopule. Průměrný poměr empirické a teoretické pravděpodobnosti je při aplikaci této kopule nejbližší jedné a zároveň zde docházíme k nejnižší průměrné odchylce kolem jednotkového poměru. Jinými slovy, počet chybných odhadů je přes všechna pozorovaná data podobný, bez výraznějších výkyvů. Mezi výkonem AD Studentovy kopule a ostatními kopulemi je relativně výraznější rozdíl. Nejméně přesná je z uvedených kopul symetrická Studentova kopule, jejíž aplikace v porovnání s ostatními kopulemi poskytuje volatilnější odhady.

Ze zbývajících metod podává nejlepší výkon historická simulace, ovšem zde je třeba poukázat na výraznější odchylky v poskytovaných odhadech. Nejhoršího výkonu je dosaženo prostřednictvím základního parametrického přístupu, jehož odhady jsou zatíženy výraznou odchylkou.

**Tabulka 4: Průměry a odchylky poměrů  $\hat{\alpha}/\alpha$  a četnost selhání jednotlivých modelů dle UC a CC testu**

	0,05		0,01		0,05		0,01	
	Průměr	SD	Průměr	SD	UC	CC	UC	CC
AD	1,0780	0,2412	1,0922	0,2994	0	0	0	0
A	1,1404	0,3584	1,1977	0,5164	0	1	0	0
D	1,1410	0,3628	1,2217	0,5896	0	2	0	0
S	1,1636	0,4375	1,2883	0,7593	1	2	0	1
RM	1,2085	0,5416	1,9929	2,5438	1	4	5	5
VC	1,1957	0,5510	2,4965	3,7763	3	6	6	6
HS250	1,2241	0,5743	1,8652	2,1351	2	6	6	6
HS500	1,1858	0,5448	1,6809	1,9104	3	6	3	4

Zdroj: Vlastní zpracování dle vlastní kalkulace

Za účelem realizace zpětného testování prostřednictvím formálního přístupu je použit kombinovaný podmíněný (CC) test. Tabulka 4 dále uvádí pro jednotlivé přístupy počty zamítnutí UC a CC. Z tabulky jasně vyplývá výrazná preference AD Studentovy kopule. Co do přesnosti je na druhém místě je asymetrická kopule a dále dynamická (symetrická) kopule, jež při 1% hladině významnosti nedosahují rovněž žádného zamítnutí. Jako nejméně přesná se

z použitých kopul jeví symetrická Studentova kopule. Na druhou stranu, v porovnání se zbývajícími přístupy, i tak poskytuje tato kopule kvalitní výstupy.

#### 4 Výsledky – optimalizace portfolia

Za účelem realizace optimalizačních strategií uvažujeme časový rozsah použitého datového vzorku jako v předcházející části, tj. optimalizace je prováděna pro dny 3. 1. 2007 až 31. 8. 2016. Konkrétně pro každý z uvedených dnů uvažujeme 250 předchozích pozorování, na která aplikujeme výše uvedené strategie.

V případě třetí strategie je aplikována pouze nejlépe hodnocená kopule, konkrétně asymetrická dynamická (AD) Studentova kopule. Způsob aplikace je shrnut v následujících krocích:

- 1) Uvažujeme výnosy uvedených šesti akciových indexů a šesti k nim vztažených měnových kurzů (očištěné o výskyt podmíněné střední hodnoty a podmíněné volatility)
- 2) Prostřednictvím semiparametrické CML metody odhadujeme parametry asymetrické dynamické Studentovi kopule.
- 3) Prostřednictvím Monte Carlo simulace pro jednotlivá predikční období  $t \in [1, 2400]$  generujeme 20 000 jedno-krokových (jednodenních) předpovědí. Pro konkrétní  $j$  a  $t$  získáváme matici o rozměrech  $20\,000 \times 12$ . Následně jsou tyto simulace dle výše uvedeného postupu transformovány do podoby matice o rozměrech  $20\,000 \times 6$ , kde jednotlivé sloupce odpovídají akcio-měnovým výnosům  $r_{1,t+1}^{EUR}, \dots, r_{6,t+1}^{EUR}$ .
- 4) Na takto získaná data aplikujeme třetí strategii založenou na minimalizaci 95% a 99% ES, přičemž pro každé predikční období a obě hladiny spolehlivosti získáváme 20 různých vah.
- 5) Pro obě úrovně spolehlivosti jsou optimální váhy vybrány maximalizací jednak Sharpeova poměru, tak STAR poměru.

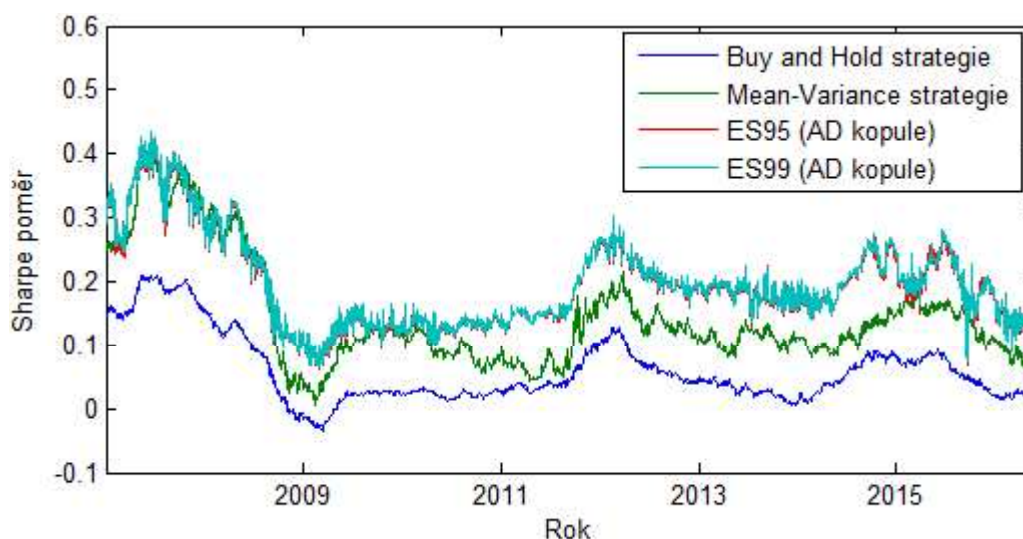
Za účelem srovnání používáme pro volbu optimálních vah dále první a druhý přístup (představený v první kapitole tohoto textu) – jedná se konkrétně o BH strategii a tradiční Markowitzův přístup (MV), v rámci něhož je pro nalezení optimálních vah použit Sharpeův poměr. Abychom měli možnost srovnat i výkonnost podle STAR poměru, je nutné aplikovat některou metod pro odhad ES. Vzhledem k tomu, že při aplikaci kopul je použita metoda Monte

Carlo, používáme tento přístup i pro odhad ES bez použití kopul. Konkrétně, na základě empirických rozdělení dvanácti výnosů  $r_1^P, r_1^S, \dots, r_6^P, r_6^S$  generujeme 20 000 odhadů  $r_{1,t+1}^{EUR}, \dots, r_{6,t+1}^{EUR}$ .

Obrázek 2 představuje výkon představených strategií, hodnocený prostřednictvím maximalizace Sharpeova poměru (SP). Z uvedeného obrázku je patrné, že v naprosté většině ze sledovaných investičních období optimální portfolia založená na asymetrické dynamické kopuli dominují ostatní strategiím. Konkrétně, výkon 99% a 95% ES pro odhad vah je srovnatelný, nejhoršího výkonu je dle očekávání dosaženo „naivní“ BH strategií. Vzhledem k omezení SP je dále aplikován STARR poměr (STP). Konkrétně je dle Stoyanov et al. (2007) pro každé investiční období realizována maximalizace STP. Výsledné hodnoty jsou prezentovány na obrázku 3. Vzhledem k celkové podobnosti různých hladin spolehlivosti pro stejné ES jsou prezentovány pouze výsledky vztahující se k 99% VaR. Z obrázku 3 je opět vidět, že optimální alokace s použitím AD kopule poskytuje lepší výsledky než s použitím Monte Carlo simulace založené na předpokladu normálního rozdělení rizikových faktorů.

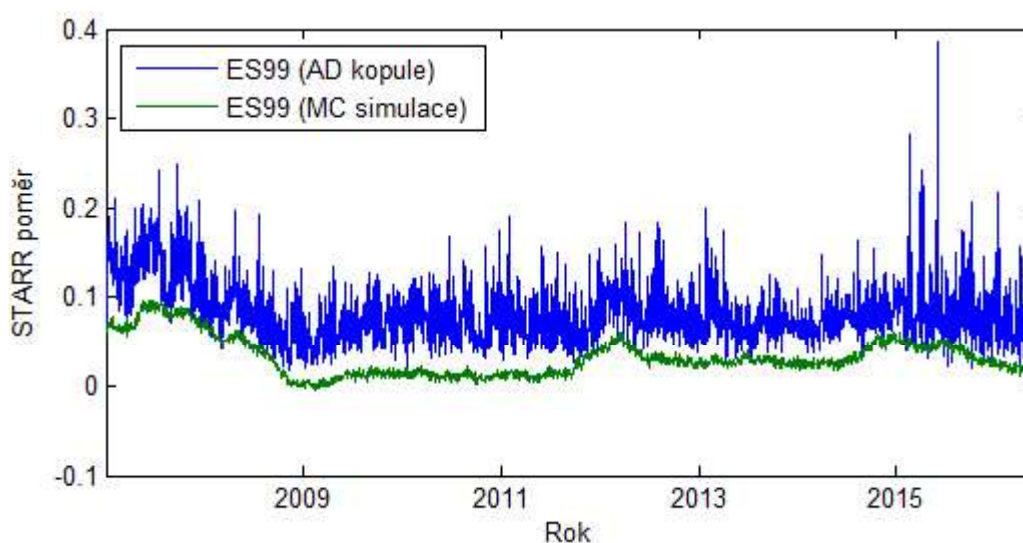
Zjištěné výsledky ukazují, že struktura závislosti na mezinárodních finančních trzích je komplikovanější než struktura, kterou předpokládají klasické přístupy. Jinými slovy, základní přístupy používané pro optimalizaci portfolia poskytují ekonomicky neuspokojivé výsledky, čehož důvodem je skutečnost, že ignorují reálnou strukturu závislostí v rámci portfolia. Tedy použití asymetrické dynamické kopule namísto jednoduché korelační závislosti umožňuje, prostřednictvím zachycení zachycením velmi komplikované struktury závislosti správně vyvážit výnosnost a riziko portfolia.

**Obrázek č. 2: Hodnocení optimální alokace - Sharpe poměr**



Zdroj: vlastní zpracování

**Obrázek č. 3: Hodnocení optimální alokace - STARR poměr**



Zdroj: vlastní zpracování

## 5 Diskuse výsledků

Výsledky vztahující se k odhadu VaR ukazují, že mezi výnosy akciových indexů a příslušných měnových kurzů skutečně existuje asymetrická a dynamická závislost. Přínosem je v tomto ohledu nalezení právě jak prvků asymetrie, tak dynamiky ve struktuře závislostí sledovaných dat. Druhá část výsledků se vztahuje k optimální alokaci použitých akciových indexů v portfoliu. Přínos této části pak spočívá v nalezení vhodného aparátu zajišťujícího vytvoření optimálního portfolia. Zjištěné výsledky jsou v souladu s dříve publikovanými pracemi,

například Lin (2011), jež prostřednictvím dynamické SJC kopule a asymetrické Claytonovy kopule rovněž indikují jak dynamiku, tak asymetrii ve struktuře závislostí akciových indexů a příslušných měnových kurzů. Efektivnější způsob optimalizace portfolia při zohlednění dynamiky ve struktuře závislostí potvrzují Jin et al. (2018).

## **Závěr**

V rámci tohoto příspěvku byla poskytnuta empirická studie vztahující se ke struktuře závislostí na mezinárodních finančních trzích. Celkově zjišťujeme výskyt asymetrické a dynamické závislosti mezi akciovým indexem a odpovídajícím měnovým kurzem. Konkrétně závislost jejich levých chvostů je ve většině případů vyšší než závislost pravých chvostů, což naznačuje že, současný pokles hodnoty akcií a depreciace odpovídajícího měnového kurzu je častější než opak, tedy růst hodnoty akcií a apreciacie měnového kurzu. Kromě toho byly také poskytnuty důkazy proti v čase statické závislosti mezi akciovým portfoliem a příslušným měnovým kurzem. Tento výsledek znamená, že závislosti se mění v čase a tedy nacházíme dynamickou strukturu závislostí mezi akciemi a měnovými kurzy.

Za účelem zachycení a zohlednění této asymetrické a dynamické struktury závislostí je navržena asymetrická dynamická (AD) Studentova kopule, jež kromě zmíněné asymetrie a dynamiky umožňuje zachytit rovněž nelinearitu v závislostech a také přítomnou nenormalitu vícerozměrného rozdělení. Získané výsledky o dynamické a asymetrické závislosti mají důležité důsledky pro měření a řízení rizik.

Za účelem prezentace užitečnosti modelu AD kopule při předpovídání tržního rizika, je tento model aplikován v rámci realizace odhadů VaR a ES. Výsledky zpětného testování ukazují, že hodnocený model poskytuje lepší předpovědní výkon než jiné široce používané modely, a to jak 95%, tak 99% hladině spolehlivosti. Model AD kopule proto může být pro investory ideální volbou pro zajištění větší robustnosti řízení rizik na mezinárodních finančních trzích. Kromě kvalitního předpovědního výkonu při odhadu rizikových měr, byl rovněž pro model AD prokázán výrazně pozitivní vliv na optimalizaci portfolia. Konkrétně, optimalizace na základě minimalizace ES poskytuje větší portfoliový výnos, než běžně používané přístupy jako naivní Buy and Hold strategie nebo Markowitzův optimalizační přístup založený na minimalizaci směrodatné odchylky portfolia. Tedy struktura závislostí na mezinárodních finančních trzích je komplikovanější než struktura, kterou předpokládají klasické přístupy a za účelem realizace optimální alokace aktiv na mezinárodních finančních trzích je nutné zohlednit asymetrii a dynamiku závislostí přítomnou na těchto trzích.



Tento článek vznikl na Vysoké školy finanční a správní v rámci projektu „*Nové možnosti a přístupy pro měření a řízení tržních rizik*“ číslo 7427/2017/05 podpořeného z prostředků účelové podpory na specifický vysokoškolský výzkum.

## Literatura

- [1] ALEXANDER, Carol. *Market Risk Analysis: Value at Risk Models*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0470997888.
- [2] ANG, Andrew a Joseph CHEN. Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*. 2002, vol. 63, no. 3, s. 443–494. ISSN 0304-405X.
- [3] CERRATO, Mario, John CROSBY, Minjoo KIM, a Yang ZHAO. Modeling Dependence Structure and Forecasting Market Risk with Dynamic Asymmetric Copula. [online]. 2015. [cit. 21. 6. 2017]. Dostupné z: [https://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN\\_ID2620825\\_code2197816.pdf?abstractid=2460168&mirid=1](https://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID2620825_code2197816.pdf?abstractid=2460168&mirid=1)
- [4] CHRISTOFFERSEN, Peter a Hugues LANGLOIS. The joint dynamics of equity market factors. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 2013, vol. 48, no. 5, s. 1371–1404. ISSN 1756-6916.
- [5] CZADO, Claudia, Ulf SCHEPSMEIER a Aleksey MIN. Maximum likelihood estimation of mixed C-vines with application to exchange rates. *Statistical Modelling*. 2012, vol. 12, no. 3, s. 229–255. ISSN 1477-0342.
- [6] DIAS, Alexandra a Paul EMBRECHTS. Modeling exchange rate dependence dynamics at different time horizons. *Journal of International Money and Finance*. 2010, vol. 29, no. 8, pp. 1687–1705. ISSN 0261-5606.
- [7] LIN, Fangxia. Tail Dependence between Stock Index Returns and Foreign Exchange Rate Returns – A Copula Approach. [online]. 2011. [cit. 21. 4. 2018]. Dostupné z: [https://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN\\_ID1931726\\_code732907.pdf?abstractid=1931726&mirid=1](https://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID1931726_code732907.pdf?abstractid=1931726&mirid=1)
- [8] HOLT, Charles A. a Susan K. LAURY. Risk Aversion and Incentive Effects. *The American Economic Review*. 2002, vol. 92, no. 5, s. 1644–1655. ISSN 0002-8282.
- [9] JIN, Xisong a Thorsten LEHNERT. Large Portfolio Risk Management and Optimal Portfolio Allocation with Dynamic Elliptical Copulas. *Dependence Modeling*. 2018, vol. 6, no. 1, s. 19–46. ISSN 2300-2298.
- [10] JONDEAU, Eric a Michael ROCKINGER. The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of International Money and Finance*. 2006, vol. 25, no. 5, s. 827–853. ISSN 0261-5606.
- [11] JORION, Philippe. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. London: McGraw-Hill. 2007. ISBN 978-0071464956.

- [12] LONGIN, François a Bruno SOLNIK. Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*. 2001, vol. 56, no. 2, s. 649–676. ISSN 1540-6261.
- [13] MARKOWITZ, Harry M. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952, vol. 7, no. 1, s. 77–91. ISSN 1540-626.
- [14] PATTON, Andrew J. Modelling Asymmetric Exchange Rate. *International Economic Review*. 2006, vol. 47, no. 2, pp. 527–556. ISSN 1468-2354.
- [15] PATTON, Andrew J. Copula methods for forecasting multivariate time series. In ELLIOTT, Graham a Allan TIMMERMANN. *Handbook of Economic Forecasting*. 2013, vol. 2, part B, s. 899–960. ISBN 978-0444627315.
- [16] POON, Ser-Huang. A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility. Chichester, London: John Wiley & Sons, Ltd., 2005. ISBN 978-0470856130.
- [17] SHARPE, William F. Mutual fund performance. *Journal of Business*. 1965, vol. 39, no. 1, s. 119–138. ISSN 0021-9398.
- [18] STOYANOV, Stoyan V., Svetlozar RACHEV a Frank FABOZZI. Optimal financial portfolios. *Applied Mathematical Finance*. 2007, vol. 14, no. 5, s. 401–436. ISSN 1466-4313.
- [19] ROCKAFELLAR, Ralph T. a Stanislav URYASEV. Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*. 2000, vol. 2, no. 3. s. 21–41. ISSN 1755-2842.

## **Kontakt**

Mgr. Tomáš Jeřábek, MBA  
 Vysoká škola finanční a správní  
 Fakulta ekonomických studií  
 Estonská 500, 101 00 Praha 10  
 Česká republika  
 jerabek@mail.vsf.scz